Quelques explications mathématiques

Note : les points 1. 2. 3. de ce texte sont relatifs aux renvois du tableau de l'article "Dispertion des moyennes"

Avertissement : Dans ce qui suit on suppose que la probabilité de faire un point est constante. Cette situation ne correspond évidemment pas aux jeux de série et sans doute pas aux 3-Bandes joués par les meilleurs.

Appelons p la probabilité (constante) de faire un point, r le nombre de reprises (supposé constant), n le nombre de coups joués, X le nombre de points et m la moyenne.

1. **Moyenne et probabilité de faire un point**
   On a
   $$m = \frac{X}{r}$$
   $$n = r + X$$
   A chaque coup joué on marque p points, sur l'ensemble des n coups on marque $n \times p$ points. Il en résulte
   $$m = \frac{n\,p}{r} = p\frac{r+X}{r} = p(1+m)$$
   et donc
   $$m = \frac{p}{1-p}, \qquad p = \frac{m}{1+m}$$

2. **Moyenne du plus grand nombre de traits consécutifs**
   On note $q = 1 - p$, c'est la probabilité de rater un point. Comme on suppose que les essais sont indépendants, q est aussi la probabilité de faire un trait.

   On utilise l'approximation (5) page 202 de l'article (*).
   (Cette approximation nécessite que r soit assez grand)
   $$Moy \approx \log_{1/q}(r\,p) + \gamma/\ln(1/q) - 1/2$$
   γ étant la constante d'Euler.

3. **Moyenne de la meilleure série**
   On utilise la même approximation que pour la moyenne du nombre de traits en inversant le rôle de p et de q. Il faut aussi remplacer le nombre de reprises r (constant) par le nombre de coups joués $n = r + X$. X étant variable, on remplace X par $r \times m$.
   $$Moy \approx \log_{1/p}(n\,q) + \gamma/\ln(1/p) - 1/2$$

4. **Remarque**
   On observe sur les formules d'approximation précédentes que, pour $p = q = 0.5$, quand on double le nombre de reprises, la moyenne du plus grand nombre de traits consécutifs, ainsi que la moyenne de la meilleure série, augmentent d'une simple unité.

(*) M.F. Schilling. The Longest Run of Heads. *The College Mathematics Journal* **Vol21, No3, May 1990** 196-207